Perrin p143
Rombaldi p731

GÉNÉRATEURS DU GROUPE (SPÉCIAL) ORTHOGONAL EUCLIDIEN

106, 108, 151, 160, 161, 170

Soit (E,q) un espace quadratique euclidien, i.e. un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une forme quadratique définie positive q. On note φ la forme polaire de q.

<u>Def 0</u> : On dit que $u \in O(q)$ est une *réflexion* (resp. un *renversement*) si $\dim(\mathrm{Ker}(u+id_E)) = 1$ (resp. $=2$).

<u>Thm 1</u> : Tout élément de $O(q)$ est produit d'au plus n réflexions.

<u>Thm 2</u> : Si $n=3$, alors tout élément de $SO(q)$ est produit d'au plus n renversements.

<u>Preuve de Thm 1</u> : Pour $u \in O(q)$, posons $F_u = \mathrm{Ker}(u - id_E)$ et $p_u = n - \dim(F_u)$. Démontrons par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathcal{H}_k : \text{“} \forall u \in O(q),\ p_u = k \Rightarrow u \text{ est produit d'au plus } k \text{ réflexions”}$$

- $k=0$: $F_u = E$ donc $u = id_E$ est produit d'au plus $0 = p_u$ réflexions.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons $\forall r<k,\ \mathcal{H}_r$. Soit $u \in O(q)$, supposons que $p_u = k$.

L'idée (classique) de la preuve est de trouver une réflexion τ telle que $p_{\tau\circ u} < p_u$, ce qui est vrai $F_u \subsetneq F_{\tau\circ u}$. Pour cela, on utilise la propriété (très classique) suivante : si x et y ont même norme, alors $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux. Le but du jeu est alors de trouver x et y de même norme tel que $x-y \neq 0$, et de considérer la réflexion par rapport à $\mathbb{R}(x-y)^\perp$ (on aurait aussi pu travailler avec $x+y$).

- Comme $p_u > 0$, $F_u \neq E$, on peut considérer $x \in F_u^\perp \setminus \{0\}$. Posons $y = u(x)$. Comme $x \notin F_u$, $x \neq u(x)$, donc $x-y \neq 0$. De là, $\mathbb{R}(x-y)^\perp$ est un hyperplan de E : soit τ la réflexion associée.
- Montrons que pour tout $z \in F_u$, $z \in F_{\tau\circ u}$, i.e. $\tau\circ u(z) = z$, i.e. $\tau(z) = z$ (car $u(z) = z$), i.e. $z \in \mathbb{R}(x-y)^\perp$; autrement dit, montrons que $F_u \subseteq \mathbb{R}(x-y)^\perp$. Comme q est non dégénérée (car définie positive), $F_u^{\perp\perp} = F_u$, donc il suffit de montrer que $\mathbb{R}(x-y) \subseteq F_u^\perp$, i.e. $x-y \in F_u^\perp$, i.e. $y \in F_u^\perp$ (car $x \in F_u^\perp$). Pour tout $z \in F_u$, $\varphi(y,z) = \varphi(u(x), u(z)) = \varphi(x,z) = 0$ (car u est une isométrie et $x \in F_u^\perp$), donc $y \in F_u^\perp$.
- On a montré que $F_u \subseteq F_{\tau\circ u}$, montrons que cette inclusion est stricte : on sait déjà que $x \notin F_u$, montrons que $x \in F_{\tau\circ u}$, i.e. $x = \tau\circ u(x) = \tau(y)$. Comme u est une isométrie, $\varphi(x+y, x-y) = q(x) - q(y) - \varphi(x,y) + \varphi(y,x) = q(x) - q\circ u(x) = 0$, donc $x+y \perp x-y$, donc $x+y \in \mathbb{R}(x-y)^\perp$, donc $\tau(x+y) = x+y$. Or $\tau(x-y) = -(x-y)$, donc $\tau(y) = \frac{1}{2}(\tau(x+y) - \tau(x-y)) = \frac{1}{2}(x+y+(x-y)) = x$.
- D'après l'hypothèse de récurrence, $\tau\circ u$ est le produit d'au plus $p_{\tau\circ u} \leq p_u - 1 = k-1$ réflexions, donc $u = \tau^{-1}\circ(\tau\circ u)$ est produit d'au plus k réflexions. ■

<u>Preuve de Thm 2</u> : Soit $u \in SO(q)$. Il existe $\tau_1, \dots, \tau_r$ $(r \leq n)$ des réflexions telles que $u = \tau_1 \cdots \tau_r$. Or $1 = \det(u) = \det(\tau_1) \cdots \det(\tau_r) = (-1)^r$, donc r est pair. Il suffit donc de montrer qu'un produit de deux réflexions est aussi un produit de deux renversements.

- $n=3$: remarquons que $\tau_1\tau_2 = (-\tau_1)(-\tau_2)$ et $-\tau_1$ et $-\tau_2$ sont des renversements car $E = \mathrm{Ker}(\tau_i - id_E) \oplus \mathrm{Ker}(\tau_i + id_E)$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(-\tau_i + id_E)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(\tau_i + id_E)) = 3 - 1 = 2$ (rq : dans une base convenable, une réflexion a pour matrice $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ et un renversement $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$).
- $n>3$: notons H_1 et H_2 les hyperplans invariants par τ_1 et τ_2. En particulier, $\dim(H_1 \cap H_2) \geq \dim(E) - 2 > n-3 \geq 0$. On peut alors considérer un sous espace V de $H_1 \cap H_2$ de dimension $n-3$. Posons $u = \tau_1 \circ \tau_2$, qui induit id_V sur V (pour tout $z \in V \subseteq H_1 \cap H_2$, $u(z) = \tau_1\tau_2(z) = \tau_1(z) = z$).

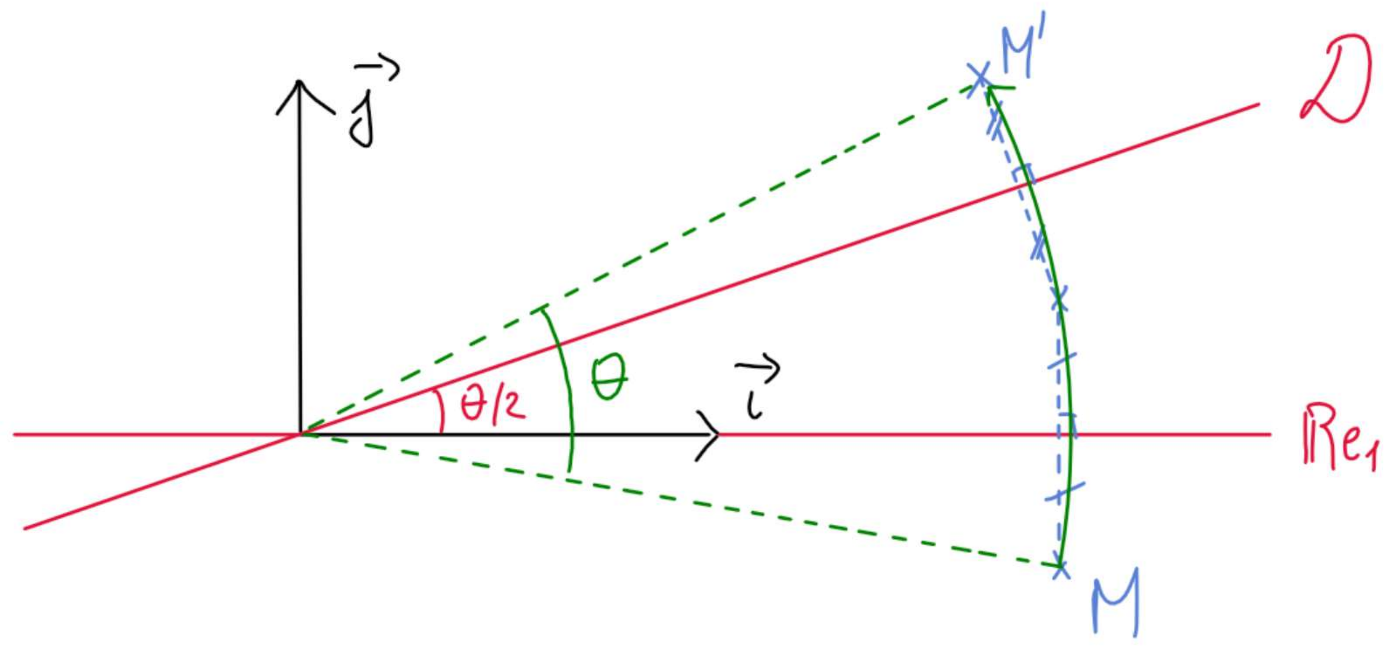
Par ailleurs, $V^\perp$ est stable par u : en effet, $\forall y \in V^\perp$, $\forall z \in V$, $\varphi(u(y), z) = \varphi(u(y), u(z)) = \varphi(y,z) = 0$ (car u est une isométrie). On note $u_{V^\perp}$ l'isométrie induite par u sur $V^\perp$.

Comme q est non dégénérée (car définie positive), $E = V \oplus V^\perp$ et $\dim(V^\perp) = \dim(E) - \dim(V) = 3$. D'après Thm 1 couplé au cas $n=3$, il existe deux renversements $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ de $V^\perp$ tels que $u_{V^\perp} = \tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2$. On prolonge $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ en deux renversements σ_1 et σ_2 de E par l'identité sur V. De là, $\tau_1\tau_2 = u = \sigma_1\sigma_2$ est produit de deux renversements. ■

Commentaires

- Attention, Perrin a cette très mauvaise habitude de faire des preuves si raccourcies qu'il manque toutes les justifications, et fait des récurrenes obscures sans écrire clairement ce qu'il montre et la variable sur laquelle il récurre. Ce développement demande donc un minimum de préparation.

- En pratique, comment fait-on (dans le cas du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) ?
  - Soit u une rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle θ, soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. Remarquons que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = S(\theta)S(0)$ où $S(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ est la matrice dans $\mathcal{B}$ de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D} = \mathbb{R}\left(\cos(\frac{\theta}{2})\vec{\imath} + \sin(\frac{\theta}{2})\vec{\jmath}\right)$. Ainsi, u est la composée des symétries orthogonales par rapport à $\mathbb{R}e_1$ et $\mathcal{D}$.



  - Une symétrie de $\mathbb{R}^2$ est déjà une réflexion de $\mathbb{R}^2$.

  - Soit u une rotation de $\mathbb{R}^3$ distincte de l'identité. Il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$ et $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} R(\theta) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$. Comme u induit la rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}\vec{\imath} + \mathbb{R}\vec{\jmath}$, l'étude précédente permet d'écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} S(\theta) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Or $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice dans $\mathcal{B}$ de la réflexion d'hyperplan (ici, de plan tout court) $\mathbb{R}\vec{\imath} + \mathbb{R}\vec{k}$, et $\left(\begin{array}{c|c} S(\theta) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ conserve la composante en $\vec{k}$ et applique la symétrie de $\mathbb{R}\vec{\imath} + \mathbb{R}\vec{\jmath}$ par rapport à $\mathcal{D} = \mathbb{R}\left(\cos(\frac{\theta}{2})\vec{\imath} + \sin(\frac{\theta}{2})\vec{\imath}\right)$: in fine, c'est la matrice dans $\mathcal{B}$ de la réflexion par rapport au plan vectoriel contenant $\mathcal{D}$ et $\vec{k}$. (On obtient le produit de renversements avec l'astuce du Lemme, ce qui correspond aux renversements par rapport à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.)

  - Si u est une symétrie de $\mathbb{R}^3$, alors c'est soit une réflexion, auquel cas on n'a rien à faire, soit un renversement, soit $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. Si $u = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, alors c'est le produit des réflexions par rapport aux trois plans orthogonaux aux vecteurs d'une base orthonomée quelconque de $\mathbb{R}^3$. Si u est un renversement par rapport à $\mathcal{D}'$, alors en prenant une base orthonomale $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ telle que $\mathcal{D}' = \mathbb{R}\vec{\imath}$, alors c'est le produit des réflexions par rapport aux plans $\mathbb{R}\vec{\imath} + \mathbb{R}\vec{k}$ et $\mathbb{R}\vec{\imath} + \mathbb{R}\vec{\jmath}$.